Iranian Journal of Insurance Research
(IJIR)
Homepage: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=en

Insurance Research Center (IRC)

ORIGINAL RESEARCH PAPER

Markovian approach application in joint-life mortality modeling

S. Tajobian [*], **A. Hassanzadeh**
Department of Actuarial Science, Faculty of Mathematical Sciences, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

ARTICLE INFO

Article History
Received: 26 January 2015
Revised: 06 July 2015
Accepted: 07 September 2015

Keywords
Markov model;
Semi-markov model;
Couples joint lifetime;
Last survivor;
Death power;
Joint casualty;
Broken heart syndrome.

ABSTRACT

Most of the insurance companies postulate independence between joint lives. A model for the impact of one life's survivorship on another is required for products that provide contingent benefits on the combined survival status of multiple lives and independence assumption of joint lives is not efficient. This model has a potentially significant economic effect on the insurance industry.

The future dependence lifetime of the couples as a model is presented based on the Markov and semi-Markov models according to which three kinds of dependence can be measured: the instantaneous dependence due to an unexpected event that affect both couples lives, the short-term impact of spousal death which affects the next one severely, and the long-term period resulting in the degree each of the couples lifetime influences on the other one during their joint lives.

Due to the fact that there is no general death data base in Iran, the data provided by Society of Actuaries have been utilized to model the impact of the couples dependence on and the last survivor; also, the effect of dependence on the annuity values has been studied and at last, the inaccuracy of the effect of couples lifetime on the pricing annuity is indicated.

***Corresponding Author:**
Email: *sofy.tn@gmail.com*
DOI: ۱۰,۲۲۰٥٦/ijir.۲۰۱٤.۰۲,۰۳

نشریه علمی پژوهشنامه بیمه دوره ۴، شماره ۲، بهار ۱۳۹۴، شماره پیاپی ۱۲، ص ۲۱۸-۲۳۲

نشریه علمی پژوهشنامه بیمه

سایت نشریه: https://ijir.irc.ac.ir/?lang=fa

مقاله علمی

کاربردهای رویکرد مارکوفی در مدل‌بندی مرگ‌ومیر زوجین

سفیرا تعجبیان*، امین حسن‌زاده

گروه علوم بیم‌سنجی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

اطلاعات مقاله

تاریخ دریافت: ۰۶ بهمن ۱۳۹۳
تاریخ داوری: ۱۵ تیر ۱۳۹۴
تاریخ پذیرش: ۱۶ شهریور ۱۳۹۴

کلمات کلیدی

مدل مارکوف
مدل نیم‌مارکوف
زندگی مشترک زوجین
آخرین بازمانده
نیروی مرگ‌ومیر
سانحهٔ مشترک
سندروم قلب شکسته

چکیده:

بسیاری از شرکت‌های بیمه در فرضیهٔ استقلال بین طول عمر زوجین ممارست می‌ورزند. برای محصولاتی که سودی مشروط باتوجه به ترکیبی از وضعیت بقای زندگی توأم زوجین پرداخته می‌شود، به مدلی با تأثیرگذاری باقی‌مانده زندگی یکی بر دیگری نیازمندیم و فرضیهٔ استقلال طول عمر زوجین کارآمد نیست؛ استفاده از مدل مذکور، تأثیر اقتصادی چشمگیر بالقوه‌ای بر صنعت بیمه دارد.

در این مقاله، به‌وسیلهٔ دو مدل مارکوف و نیم‌مارکوف، طول عمر آتی وابستهٔ زن و شوهر را مدل‌بندی کرده که ازاین‌طریق می‌توان سه نوع وابستگی را اندازه‌گیری کرد: وابستگی لحظه‌ای یعنی تحت تأثیر قرار گرفتن زندگی زوجین به دلیل حوادث ناگهانی؛ دوره‌ای کوتاه‌مدت پس از فوت یکی از زوجین که به‌شدت زوج باقی‌مانده را تحت تأثیر قرار می‌دهد؛ دوره‌ای بلندمدت که ناشی از میزان تأثیرگذاری سبک زندگی هر یک از زوجین بر دیگری در طول زندگی مشترکشان است.

از آنجا که یک بانک اطلاعاتی جامع از داده‌های مرگ‌ومیر در ایران وجود ندارد از داده‌های انجمن بیم‌سنج‌ها برای مدل‌بندی مستمری مشترک زوجین و آخرین بازمانده بهره برده‌ایم؛ همچنین تأثیر وابستگی را بر مقادیر مستمری مورد مطالعه قرار داده و درنهایت نادرست‌بودن فرض استقلال طول عمر زوجین در قیمت‌گذاری مستمری‌ها را نشان داده‌ایم.

***نویسنده مسئول:**

ایمیل: *sofy.tn@gmail.com*

DOI: ۱۰,۲۲۰۵۶/ijir.۲۰۱٤.۰۲,۰۳

مقدمه

در بازار کاملاً رقابتی کنونی تمامی شرکت‌های بیمه به دنبال حداکثرکردن داشتمان خود از جمله فروش قراردادهای بیشتر به بیمه‌گذاران هستند و این امر با تعیین حق‌بیمه‌های عادلانه که هم در جهتِ منافع بیمه‌گذار باشد و هم بیمه‌گر میسر خواهد شد. بسیاری از شرکت‌های بیمه بر فرضیهٔ استقلال بین طول عمر زوجین ممارست می‌ورزند. فرضیهٔ غیرواقعی استقلال، تأثیر اقتصادی بالقوه‌ای بر صنعت بیمه دارد. شرکت‌های بیمه برای محصولاتی که مزایا را مشروط به ترکیبی از وضعیت بقای بیمه‌شدگان مشترک می‌پردازند، به مدلی با تأثیرگذاری باقی‌ماندهٔ زندگی زوجین بر یکدیگر نیازمند هستند. این موضوع امری مهم و حساس در قیمت‌گذاری و ارزیابی ذخیرهٔ محصولات بیمه‌ای است.

چندین مطالعه تجربی در سال‌های اخیر پیرامون وابستگی بین طول عمر زن و شوهر صورت گرفته است. دنویت و همکاران[1] دریافتند که زوجین در معرض مخاطره‌های مشابه هستند، بنابراین فرض استقلال باقی‌ماندهٔ طول عمر زوجین درست نیست. جاگر و ساتن[2] نیز نشان دادند که یک نوع مخاطرهٔ خویشاوندی وقتی یکی از زوجین فوت می‌کند و دیگری داغدار او می‌شود، افزایش پیدا می‌کند و آن را سندروم قلب شکسته[3] نامیدند. این عامل می‌تواند برای یک دورهٔ زمانی کوتاه‌مدت به طول بیانجامد و باعث افزایش احتمال فوت زوج بازمانده شود. سندروم قلب شکسته برای توجیهٔ افزایش مرگ‌ومیرها بعد از فوت همسر بیان می‌شود، اگرچه علت فوت آنها از یکدیگر مستقل است. این موضوع مقوله‌ای متفاوت با عامل سانحهٔ مشترک[4] است که بیان می‌کند فوت هم‌زمان، ناشی از یک حادثهٔ مشترک شامل تصادفات مرگبار، سقوط هواپیما، حوادث طبیعی همچون زلزله، سیل و... می‌شود.

در این مقاله نشان داده می‌شود که هر دوی عوامل سانحهٔ مشترک و سندروم قلب شکسته در مجموعهٔ داده‌هایمان بر وابستگی طول عمر زوجین مؤثر هستند. این مورد می‌تواند امری تأثیرگذار بر مدیریت مخاطرهٔ قراردادهای مستمری زندگی مشترک زوجین و آخرین بازمانده باشد.

یک راه برای مدل‌بندی وابستگی بین طول عمر زوجین استفاده از مدل‌های وضعیت متناهی مارکوف[5] است. در اینجا نشان داده می‌شود که مدل‌های مارکوفی در مدل‌بندی زندگی وابستهٔ زوجین، انعطاف‌پذیر، شفاف و به‌راحتی قابل گسترش هستند. در این مدل شدت انتقال تنها به وضعیت جاری بستگی دارد؛ درحالی‌که در مدل‌های نیم‌مارکوف[6] شدت انتقال به وضعیت جاری و مدت زمان طی‌شده در آخرین وضعیت وابسته است.

از مدل‌های مارکوفی برای مدل‌بندی طول عمر زندگی زوجین به صورت وابسته به عنوان جانشینی برای روش‌های دیگر بهره برده‌ایم. برای بیان وابستگی لحظه‌ای بین طول عمر زوجین در مدل مارکوف از عامل سانحهٔ مشترک استفاده کرده‌ایم. تأثیر عامل قلب شکسته روی نیروی مرگ‌ومیر بیوه‌شدگان ناشی از ضربهٔ فوتِ از دست دادن همسر با استفاده از خاصیت نیم‌مارکوف اعمال می‌شود و تأثیر این ضربه با گذشت زمان کمتر می‌شود. هدف در مدل مرگ‌ومیر نیم‌مارکوف تعریف تابع نمایی نزولی با بهره‌گیری از تأثیر عامل داغدیدگی بر نیروی مرگ‌ومیر زوج باقی مانده است.

مدل‌های مارکوف چند وضعیتی در موارد گوناگون در دانش بیم‌سنجی کاربرد دارند. سوردراپ[7] و واترز[8] از مدل‌هایی استفاده کردند که شامل چندین وضعیت متفاوت سلامتی می‌شد. اولین عملکرد مدل‌بندی مرگ‌ومیر زندگی زوجین توسط نوربرگ[1] صورت گرفت. اسپریو و

[1]. Denuit et al., ۲۰۰۱
[2]. Jagger and Sutton, ۱۹۹۱
[3]. Broken Heart Syndrome
[4]. Common Shock
[5]. Finite State Marcov Models
[6]. Semi Marcov Models
[7]. Sverdrup, ۱۹۶۵
[8]. Waters, ۱۹۸۴

وانگ[۲] و دیکسون و همکارانش[۳] توضیح دادند که چگونه مدل‌های وضعیت متناهی مارکوف می‌توانند برای مدل‌بندی بیمه‌های سودده گوناگون استفاده شوند.

در اینجا برای محاسبهٔ نیروی مرگ‌ومیر فوت در اثر سانحهٔ مشترک از قانون گامپرتز[۴] $\mu_x = BC^x$ استفاده می‌شود. این مدل به دلیل داشتن حداقل پارامترها مورد استفاده است چون این اجازه را می‌دهد که نیروی مرگ‌ومیر بی‌نهایت نقطه (سن) را برون‌یابی کنیم. به‌این‌صورت نتیجه واضح نشان داده می‌شود و ما قادریم کمیت‌هایی همچون مقادیر مستمری را به نحو مناسبی محاسبه کنیم. اگر چه از مدل گامپرتز استفاده می‌کنیم اما ادعایی در مورد اینکه بهترین مدل ممکن را به داده‌ها برازش داده‌ایم، نداریم. هدف در اینجا به وضوح نشان دادن ترکیب مدل مرگ‌ومیر (برای سادگی گامپرتز) با پوشش مدل چند وضعیتی است که چهارچوب وابسته آنها را نشان دهد.

تحلیل مطالب

شواهدی، بر تأثیر دو عامل سانحه مشترک و سندروم قلب شکسته بر قراردادهای بیمه مشترک زوجین وجود دارد و تمامی این شواهد برای ارائه روشی مناسب به‌منظور مدل‌بندی وابستگی باقی‌ماندهٔ طول عمر زوجین اختصاص یافته است، که این وابستگی می‌تواند تأثیر معنی‌دار این مخاطره روی قراردادهای بیمه‌ای زندگی مشترک زوجین را مدیریت کند.

یک راه برای مدل‌بندی وابستگی بین طول عمرها استفاده از مدل مارکوف با وضعیت‌های محدود است. در این رویکرد برآمدهای ممکن به عنوان تعداد وضعیت‌ها قلمداد می‌شوند. انتقال، بین وضعیت‌ها توسط ماتریس شدت انتقال کنترل می‌شود. برای مدل‌بندی وابستگی تحت این رویکرد از دو مدل مارکوف و نیم‌مارکوف استفاده می‌شود. در مدل مارکوف، شدت انتقال تنها بسته به وضعیت جاری است، درحالی‌که در مدل نیم‌مارکوف شدت انتقال علاوه‌بر وضعیت جاری به مدت زمانی نیز بستگی دارد که در آخرین وضعیت سپری شده است.

مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف شفافیت و وضوح بسیار بالایی در بیان مفهوم دارند، به این معنی که به‌راحتی می‌توان انتقال وضعیت‌ها در یک مدل چند وضعیتی را مشاهده کرد. برای مثال می‌توان به جابه‌جایی از وضعیت تأهل به بیوگی و تأثیر این ضربه روی مرگ‌ومیر زوج باقی‌مانده اشاره نمود.

فرایند مارکوف

برای روشن‌شدن مفهوم کلی فرایند مارکوف می‌توان گفت که اگر زمان را در این فرایند به سه دورهٔ گذشته، حال و آینده تقسیم کنیم، آیندهٔ این فرایند بستگی به مسیری ندارد که در گذشته طی کرده است و تنها به موقعیت آن در زمان حال وابسته است. یعنی تعداد پیشامدهایی که از یک لحظه معین به بعد اتفاق می‌افتد، مستقل از پیشامدهایی است که قبل از آن اتفاق افتاده است. به‌عبارت‌دیگر، چنانچه وضعیت فرایند در لحظاتی مانند $t_۱, \dots, t_n$ مشخص باشد، می‌توان گفت که برای پیش‌بینی حرکت آیندهٔ این فرایند، تنها آخرین اطلاعات، یعنی وضعیت فرایند در لحظه t_n کافی است.

تعریف: فرایند تصادفی $\{X(t), t \geq ۰\}$ یک فرایند مارکوف است، اگر $۰ \leq t_۱ \leq t_۲ \leq \cdots \leq t_n \leq t_{n+۱}$ و $i_۰, i_۱, \dots, i_n \epsilon S$ برای همه $n \geq ۱$ برقرار باشد به‌طوری‌که:

$$\Pr(X(t_n) = i_n \,|\, X(t_{n-۱}) = i_{n-۱}, \dots, X(t_۱) = i_۱, X(t_۰) = i_۰)$$
$$= \Pr(X(t_n) = i_n \,|\, X(t_{n-۱}) = i_{n-۱})$$

---

[۱]. Norberg, ۱۹۸۹

[۲]. Spreeux and Wang, ۲۰۰۸

[۳]. Dickson et al., ۲۰۰۹

[۴]. Gompertz Law

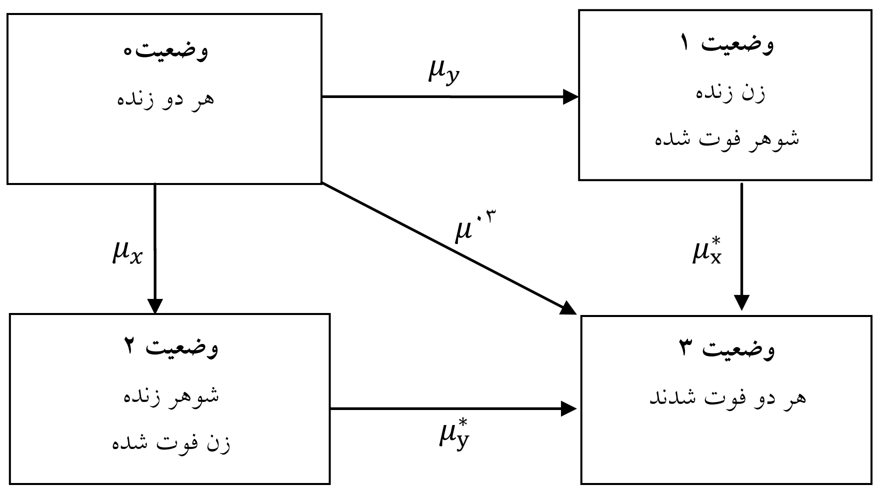
این خاصیت را خاصیت مارکوفی می‌نامند و این فرایند یک فرایند مارکوف مرتبه اول است.

در فرایند مارکوف مرتبهٔ دوم، وضعیت آینده، هم به وضعیت فعلی و هم به وضعیت پیش از این وضعیت بستگی دارد، به‌همین‌ترتیب فرایندهای مارکوف مراتب بالاتر ادامه می‌یابند.

فرایندهای مارکوف بر اساس پارامتر زمان و فضای وضعیت خود رده‌بندی می‌شوند، بر اساس فضای وضعیت، یک فرایند مارکوف می‌تواند یک فرایند مارکوف وضعیت گسسته یا یک فرایند مارکوف وضعیت پیوسته باشد.

مشخصات مدل مارکوف

شکل ۱: نمایی از مدل مارکوف



فرایند مارکوف در این مطالعه به‌راحتی توسط شکل ۱ بیان می‌شود. در اینجا ۴ وضعیت برای یک زوج در هر موقع از زمان در حالت‌های ممکن، توسط پیکانی که نشان‌دهندهٔ انتقال‌های ممکن بین وضعیت‌هاست نشان داده شده است. فرایند، فضای وضعیت {۳و۲و۱و۰} را دارد برای مثال اگر $X(t) = ۰$ باشد به این معنی است که هر دو زن و شوهر در زمان t زنده هستند. فرض می‌کنیم که نیروی مرگ‌ومیر یک فرد (چه زن و چه مرد) وابسته به سن است نه به وضعیت تأهل او. نیروی مرگ‌ومیر یک زن متأهل $x + t$ ساله با وجود اثرگذاری همهٔ عوامل جز عامل سانحهٔ مشترک، μ_{x+t} و نیز نیروی مرگ‌ومیر برای زنی که در سن $x + t$ سالگی همسر خود را از دست داده است؛ μ^*_{x+t} می‌باشد. به‌همین‌ترتیب نیروی مرگ‌ومیر برای مرد متأهل $y + t$ ساله با اثرگذاری همهٔ عوامل جز عامل سانحهٔ مشترک μ_{y+t} و نیز برای مردی در همین سن که همسر خود را از دست داده μ^*_{y+t} است.

عامل سانحهٔ مشترک باعث می‌شود فرایند مستقیماً از وضعیت ۰ به ۳ منتقل شود. با استفاده از فرضیه‌های مدل استاندارد مارکوف، بدون این انتقال، فوت هم‌زمان در این مدل غیرممکن است همچنین $\mu^{۰۳}$، شدت جابه‌جایی از وضعیت ۰ به وضعیت ۳ است که مستقل از سن (زمان) می‌باشد. این فرضیه به‌راحتی عملی است اگر اطلاعات کامل در مورد فوت، بر اثر سانحهٔ مشترک جمع‌آوری شده باشد. استفاده از انتقال سانحهٔ مشترک به این معنی است که نیروی مرگ‌ومیر کلی، برای یک زن متأهل $x + t$ ساله برابر با $\mu_{x+t} + \mu^{۰۳}$ و به‌طور مشابه برای یک مرد متأهل $y + t$ ساله برابر با $\mu_{y+t} + \mu^{۰۳}$ است.

در بسیاری از مدل‌ها، الگوی احتمال انتقال به صورت زیر دنبال می‌شود:

$$_tp_x^{ij} = \Pr(S_{x+t} = j \mid S_x = i) \quad i,j = ۰,۱,۲,۳ \quad x,t \geq ۰$$

محاسبهٔ این احتمالات نیازمند دانستن چند فرضیهٔ تکنیکی به اضافهٔ فرضیهٔ مارکوف است.

فرض ۱: احتمال دو انتقال یا بیشتر از آن در فاصله کوچک h، $o(h)$ نامیده می‌شود که در آن $o(.)$ تابعی است به‌طوری‌که:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{o(h)}{h}=۰$$

فرض ۲: ${}_tp_x^{ij}$ (احتمال اینکه یک فرد x ساله حداقل تا t سال آینده از وضعیت i به وضعیت j منتقل شود)، تابعی فارغ از t است.

حال با داشتن این دو فرضیه می‌توان ${}_tp_x^{ij}$ را با استفاده از برابری چپمن - کولموگروف[۱] محاسبه کرد، که می‌توان به‌این‌صورت نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,x+t)=P(x,x+t)\,r(x+t) \qquad x,t\geq ۰$$

که در آن:

$P(x,x+t)$: ماتریسی است که درایه‌های (i,j)ام ماتریس ${}_tp_x^{ij}$ را نشان می‌دهد.

$r(x+t)$: ماتریس مولد بی‌نهایت کوچک یا ماتریس شدت نیز نامیده می‌شود. درایهٔ (i,j)ام در $r(x+t)$ به‌صورت $\begin{cases}\mu_{x+t}^{ij} & ; \quad i\neq j\\ -\sum_{\substack{j=۰\\ j\neq i}}^{۳}\mu^{ij}(x+t) & ; \quad i=j\end{cases}$ است.

فرض ۳: در مدل‌های چند وضعیتی برای h>۰ عبارت زیر برقرار است:

$${}_tp_x^{ij}=۱-h\sum_{\substack{j=۰\\ j\neq i}}^{n}\mu_x^{ij}+o(h)$$

در ادامه عباراتی را برای کمک به حل احتمالات انتقال به‌دست‌آوردیم؛ که برای نمونه برخی از این رابطه‌ها را تعریف کرده و ثابت می‌کنیم:

${}_tp_{x:y}^{۰۰}$: احتمال این است که یک زوج به سن x و y در وضعیت صفر باشند و تا زمان t در همین وضعیت باقی بمانند.

${}_tp_x^{۱۱}$: احتمال این است که یک زن x ساله در وضعیت یک باشد و تا زمان t در همین وضعیت باقی بماند.

${}_tp_{x:y}^{۰۱}$: احتمال این است که یک زوج به سن x و y در وضعیت صفر باشند و تا زمان t به وضعیت یک منتقل شوند.

${}_tp_x^{۱۳}$: احتمال این است که یک زن x ساله که همسر خود را ازدست‌داده‌است در t از وضعیت یک به وضعیت سه منتقل شود.

به‌طورکلی این نمادها را به‌این‌صورت بیان می‌کنیم:

$${}_tp_{x:y}^{۰۰}=\exp\left(-\int_۰^t(\mu_{x+s}+\mu_{y+s}+\mu^{۰۳})\right)ds$$

$${}_tp_x^{۱۱}=\exp\left(-\int_۰^t\mu_{x+s}^{*}\right)\ ds$$

$${}_tp_y^{۲۲}=\exp\left(-\int_۰^t\mu_{y+s}^{*}\right)\ ds$$

$${}_tp_{x:y}^{۰۱}=\int_۰^t{}_tp_{x:y}^{۰۰}\,\mu_{y+s}\ {}_{t-s}p_{x+s}^{۲۲}\ ds$$

$${}_tp_{x:y}^{۰۲}=\int_۰^t{}_tp_{x:y}^{۰۰}\,\mu_{x+s}\ {}_{t-s}p_{y+s}^{۲۲}\ ds$$

$${}_tp_x^{۱۳}=\int_۰^t{}_sp_x^{۱۱}\ \mu_{x+s}^{*}\,ds$$

$${}_tp_x^{۲۳}=\int_۰^t{}_sp_y^{۲۲}\ \mu_{y+s}^{*}\,ds$$

برآورد پارامترها

فرض کنید T_x و T_y به‌ترتیب باقی‌ماندهٔ عمر زن و شوهر باشند. تابع چگالی توأم T_x و T_y به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_{T_x,T_y}(u,\upsilon)=\begin{cases}{}_up_{x:y}^{۰۰}\ {}_{\upsilon-u}p_{y+u}^{۲۲}\ \mu_{y+\upsilon}\ \mu_{x+u}^{*} & u>\upsilon\\ {}_\upsilon p_{x:y}^{۰۰}\ {}_{u-\upsilon}p_{x+\upsilon}^{۱۱}\ \mu_{y+\upsilon}\ \mu_{x+u}^{*} & u>\upsilon\\ {}_up_{x:y}^{۰۰}\ \mu^{۰۳} & u=\upsilon\end{cases}$$

---
[۱]. Chapman-Kolmogorov

با داشتن تابع چگالی توأم دو متغیره می‌توان ماکسیمم درست‌نمایی را از تابع لگاریتم درست‌نمایی برآورد نمود. فرض کنید استقلال بین زوج‌ها در داده‌ها برقرار باشد تابع لگاریتم درست‌نمایی می‌تواند به صورت مجموع سه قسمت l_3, l_2, l_1 نوشته شود.

$$l = l_1 + l_2 + l_3$$
$$l_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(-\int_0^{\upsilon_1}\left(\mu_{x_i+t} + \mu_{y_i+t} + \mu^{03}\right)dt + d_i^1 \ln\mu_{y_i+\upsilon_i} + d_i^2 \ln\mu_{x_i+\upsilon_i} + d_i^3 \ln\mu^{03}\right)$$
$$l_2 = \sum_{i=1}^{m_1}\left(-\int_0^{u_{1,j}} \mu^*_{x_j+t}\,dt + h_{1,j}\ln\mu^*_{x_j+u_{1,j}}\right)$$
$$l_3 = \sum_{k=1}^{m_2}\left(-\int_0^{u_{2,k}} \mu^*_{y_k+t}\,dt + h_{2,k}\ln\mu^*_{y_k+u_{2,k}}\right)$$

که در آن:

n مجموع تعداد زوجین در مجموعهٔ داده‌ها؛

m_1 (m_2) مجموع تعداد زنان (مردان) که همسر خود را در مجموعهٔ داده‌ها از دست داده‌اند؛

υ_i مدت زمان سپری‌شده تا انتقال زوج iام از وضعیت صفر به دیگر وضعیت‌ها؛

$d_i^j = 1$ اگر زوج iام از وضعیت صفر به وضعیت j در $t = \upsilon_i$ جابه‌جا شود. $i = 1, \dots, n$ و $j = 1,2,3$

$u_{1,j}$ $(u_{2,k})$ مدت زمان سپری‌شده تا jامین (kامین) زنی (مردی) که همسر خود را ازدست‌داده و از وضعیت ۱ (۲) خارج شود. $j = 1, \dots, m_1$ و $k = 1, \dots, m_2$

$h_{1,j=1}$ اگر jامین زنی که همسرش را ازدست‌داده در زمان $t = u_{1,j}$ فوت کند.

$h_{2,k=1}$ اگر kامین مردی که همسرش را ازدست‌داده در زمان $t = u_{2,k}$ فوت کند.

x_i و y_i سنینی هستند که زن و مرد با بستن قرارداد وارد سیستم بیمه‌ای شده‌اند و به این ترتیب زوج iام داده‌ها محسوب می‌شوند.

با ماکسیمم‌کردن سه قسمت تابع لگاریتم درست‌نمایی می‌توانیم، ماکسیمم درست‌نمایی شدت انتقال در هر وضعیت را برآورد کنیم.

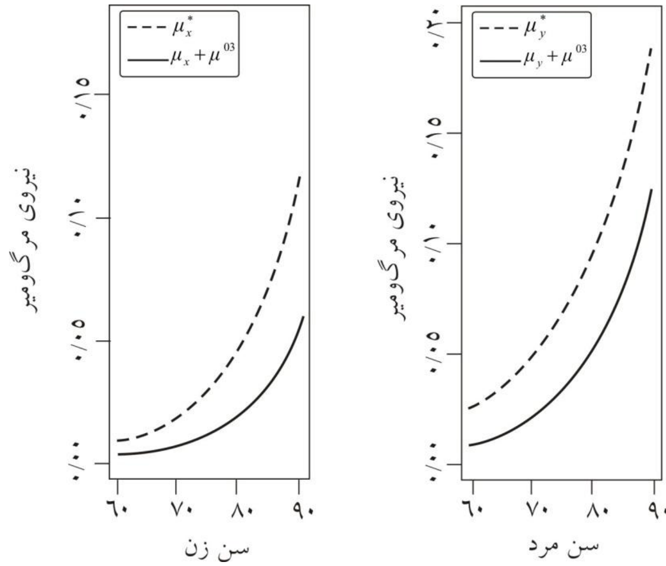
برای محاسبهٔ لگاریتم درست‌نمایی نیازمند به تعریف فوت در اثر سانحهٔ مشترک هستیم با وجود اینکه اطلاعات قطعی نیز در مورد دلیل فوت، دراین‌باره نداریم. در اینجا برای محاسبهٔ نیروی مرگ‌ومیر از قانون گامپرتز $\mu_x = BC^x$ (به‌جز μ^{03} که نسبت به سن ثابت فرض می‌شود) استفاده می‌شود.

جدول ۱: برآورد پارامترهای گامپرتز در مدل مارکوف

		B	انحراف استاندارد	C	انحراف استاندارد
زنان	μ_x	$۹/۷۵۴\times ۱۰^{-۷}$	۰/۸۶۴۳	۱/۱۲۹۰	۰/۸۰۸۶
	μ^*_x	$۲/۵۸۶\times ۱۰^{-۵}$	۰/۷۴۲۱	۱/۰۹۸۲	۰/۳۱۰۳
مردان	μ_y	$۲/۵۵۳\times ۱۰^{-۵}$	۰/۸۵۷۳	۱/۰۹۸۱	۰/۱۴۱۷
	μ^*_y	$۳/۷۹۵\times ۱۰^{-۴}$	۰/۲۶۹۱	۱/۰۷۱۵	۰/۱۱۱۱

در جدول ۱ مقادیر برآوردشدهٔ پارامترهای گامپرتز از مدل مارکوف برازش‌داده‌شده به داده‌ها نشان داده شده است. مقدار عامل سانحهٔ مشترک ۰/۱۳۹۴٪ و انحراف استاندارد ۰/۶۴۵۵٪ برآورد شده است.

نمودار ۱: نیروی مرگ‌ومیر برای هر دو وضعیت بیوهٔ زنان و مردان



در نمودار ۱ نیروی مرگ‌ومیر را به وضعیت‌های مختلف برازش دادیم؛ قابل مشاهده است که برای هر دو جنسیت زن و مرد با پذیرش عامل سانحهٔ مشترک و تخصیص ۵ روز به آن افزایش نیروی مرگ‌ومیر بعد از داغدیدگی را در مدل داریم؛ همچنین می‌توان مشاهده کرد که داغداری تأثیر زیادی از سن می‌پذیرد؛ برای مثال نیروی مرگ‌ومیر برای زنی که شوهرش در قید حیات است تا تقریباً سن ۷۰ سالگی ثابت است؛ و پس از آن سرعت بیشتری می‌یابد درحالی‌که برای زن بیوه در سن ۷۰ سالگی نیروی مرگ‌ومیر از ابتدای داغدارشدن در حال افزایش است ولی نه چندان زیاد ولی تقریباً بعد از سن ۷۰ سالگی شیب بیشتری پیدا کرده و به سرعت در حال افزایش است.

با مقایسهٔ نمودار مردان با زنان مشاهده می‌شود نیروی مرگ‌ومیر مردان از همان ابتدا در حال افزایش است؛ همچنین که تأثیر داغدارشدن و ازدست‌دادن همسر برای یک مرد خیلی بیشتر از یک زن است چرا که تقریباً نیروی مرگ‌ومیر با مقدار حدودی ۰/۰۳ برای یک زن بیوه در سن ۷۵ سالگی و برای مردی با شرایط مشابه در سن ۶۰ سالگی است.

مشخصات مدل نیم‌مارکوف

معقول به‌نظرمی‌رسد که نیروی مرگ‌ومیر بیوه‌شدگان به طور عمده بیشتر از فردی متأهل در سنین مشابه باشد؛ همچنین این امری منطقی است که تأثیر دردناک داغدیدگی روی سلامتی زوج باقی‌مانده در ماه‌های اول بسیار شدیدتر از زمان‌های دیگر است. در واقع نتایج به‌دست‌آمده از علوم پزشکی و جمعیت‌شناختی، از تأثیر سندروم قلب شکسته به‌عنوان تأثیر عامل کوتاه‌مدت این ضربه بر نیروی مرگ‌ومیر زوج باقی‌مانده یاد می‌کنند. از توابع پارامتری برای مدل‌بندی نیروی مرگ‌ومیر بعد از داغدیدگی استفاده می‌کنیم:

برای زنی که همسر خود را ازدست‌داده‌است:

$$\mu^*(x,t) = \left(۱ + a_۱ e^{-k_۱ t}\right)\left(\mu_{x+t} + \mu^{۰۳}\right) = F_۱(t)\left(\mu_{x+t} + \mu^{۰۳}\right)$$

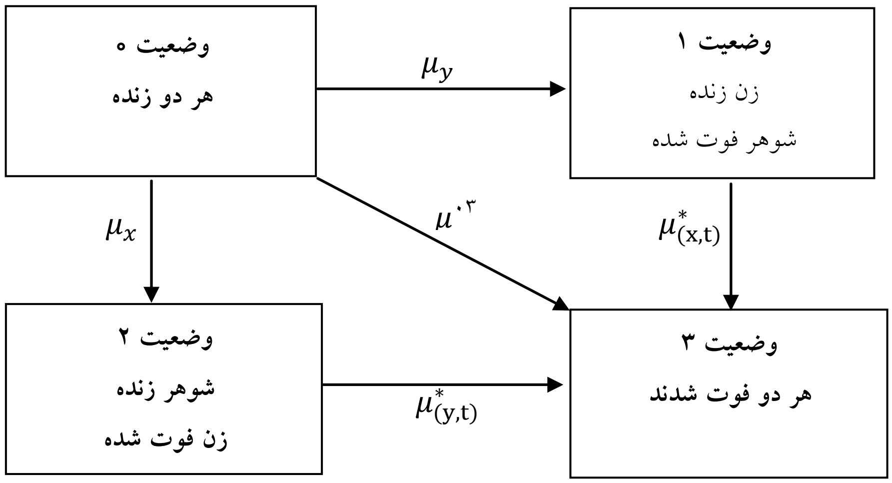
برای مردی که همسر خود را ازدست‌داده‌است:

$$\mu^*(y,t) = \left(۱ + a_۲ e^{-k_۲ t}\right)\left(\mu_{y+t} + \mu^{۰۳}\right) = F_۲(t)\left(\mu_{y+t} + \mu^{۰۳}\right)$$

که $a_j > -۱$ و $k_j > ۰$ برای $j = ۱,۲$ و t مدت زمان از شروع داغدیدگی است. نیروی مرگ‌ومیر پس از داغدیدگی نسبتی متناظر با نیروی مرگ‌ومیری است که اگر عامل داغدیدگی ناشی از فوت یکی از زوجین رخ نمی‌داد. در ابتدا نیروی مرگ‌ومیر با وجود عامل داغدیدگی با درصدی از $۱۰۰a_۱\%$ برای زنان و $۱۰۰a_۲\%$ برای مردان افزایش می‌یابد. با تأثیرگذاری عامل سندروم قلب شکسته همچنان که t در حال

افزایش است جمله نمایی فاکتورهای $F_۱(t)(\mu_{x+t}+\mu^{۰۳})$ و $F_۲(t)(\mu_{y+t}+\mu^{۰۳})$ در حال کاهش و در نهایت $F_۱(t)$ و $F_۲(t)$ (عوامل افزاینده) به یک میل می‌کنند. پارامترهای $k_۱$ و $k_۲$ منعکس‌کنندهٔ اثر زمان تا از بین رفتن تأثیر سندروم قلب شکسته مـی‌باشـند. خصوصـیات مدل نیم‌مارکوف در شکل ۲ نمایش داده شده است.

شکل ۲: نمایی از مدل نیم‌مارکوف



برآورد پارامترها

چون بسط نیم‌مارکوف تنها متأثر از نیروی مرگ‌ومیر بعد از داغدیدگی است مقادیر $\mu^{۰۳},\mu_y,\mu_x$ تفاوت معنـایی و مفهـومی در مقایسـه بـا مدل مارکوف ندارند. با استفاده از مقادیر برآوردشدهٔ پارامترهای $\mu^{۰۳},\mu_y,\mu_x$ می‌توان پارامترهای باقی‌مانده را به‌وسیلهٔ ماکسیمم درست‌نمایی برآورد نمود. تابع درست‌نمایی $l_۱^p$ برای پارامترهای $a_۱$ و $k_۱$ به‌صورت زیر است:

$$l_۱^p=\sum_{j=۱}^{m_۱}\Big(-\int_۰^{u_{۱,j}}(۱+a_۱\,e^{-k_۱t})(\hat{B}_۱\hat{C}_۱^{x+t}+\mu^{۰۳})dt$$
$$+\,h_{۱,j}\ln\big((۱+a_۱e^{-k_۱t})(\hat{B}_۱\hat{C}_۱^{x+t}+\mu^{۰۳})\big)\Big)$$

$\hat{B}_۱$ و $\hat{C}_۱$ برآورد ماکسیمم درست‌نمایی برای $B_۱$ و $C_۱$ هستند. تـابع درسـت‌نمـایی جزئـی $l_۲^p$ نیـز بـرای $a_۲$ و $k_۲$ بـا تعـویض پارامترهـای $l_۱^p$ به‌همین‌ترتیب می‌توان به‌دست‌آورد.

با ماکسیمم‌کردن $l_۱^p$ و $l_۲^p$ می‌توان پارامترهای نیم‌مارکوف را برآورد کرد. تابع کامل لگاریتم درست‌نمایی l به صورت زیر است:

$$l=l_۱+l_۲+l_۳$$
$$=\sum_{i=۱}^{n}\Big(-\int_۰^{\upsilon_۱}(\mu_{x_i+t}+\mu_{y_i+t}+\mu^{۰۳})\,dt+\,d_i^۱\ln\mu_{y_i+\upsilon_i}+d_i^۲\ln\mu_{x_i+\upsilon_i}+d_i^۳\ln\mu^{۰۳}$$
$$-\int_۰^{u_{۱,j}}(۱+a_۱\,e^{-k_۱t})(\mu_{x_i+\upsilon_i+t}+\mu^{۰۳})dt+h_{۱,j}\ln\big((۱+a_۱e^{-k_۱t})(\mu_{x_i+\upsilon_i+t}+\mu^{۰۳})\big)$$
$$-\int_۰^{u_{۲,k}}(۱+a_۲\,e^{-k_۲t})(\mu_{y_i+\upsilon_i+t}+\mu^{۰۳})dt+h_{۲,k}\ln\big((۱+a_۲e^{-k_۲t})(\mu_{y_i+\upsilon_i+t}+\mu^{۰۳})\big)\Big)$$

از برابری‌های بالا در می‌یابیم $n-m_۱$ مشاهده شده، شامل زنانی است که وارد وضعیت بیوه‌شدگی نشده‌اند پس $u_{۱,j}$ برابر بـا صـفر اسـت و طبیعتاً $h_{۱,j}$ نیز مقدار صفر را می‌گیرد وقتی $j=۱,۲,\dots,n-m_۱$.

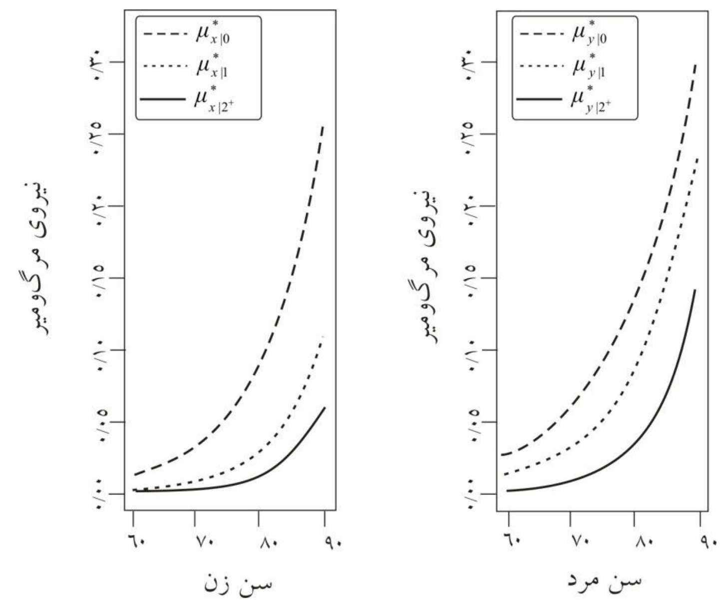
جدول ۲: برآورد پارامترهای $a_۱,a_۲,k_۱,k_۲$ در مدل نیم‌مارکوف

		برآورد	انحراف استاندارد
زنان	$a_۱$	۳/۳۵۴۸	۰/۰۶۵۷
	$k_۱$	۰/۵۰۱۹	۰/۱۵۲۹

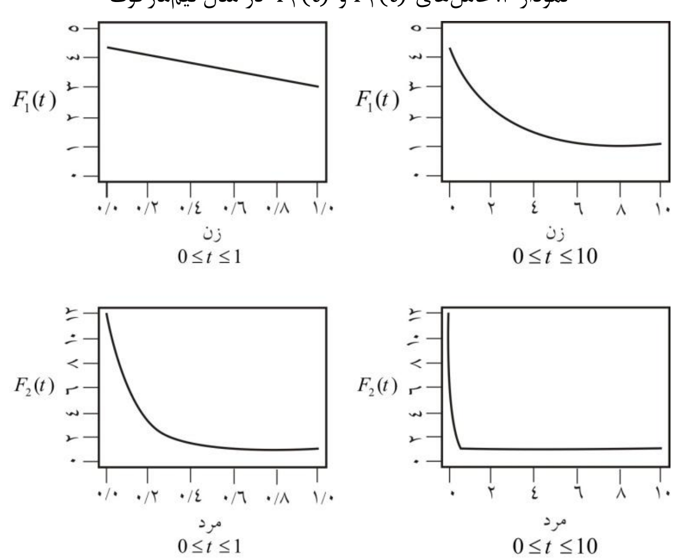
مردان	$a_۲$	۱۱/۰۸۳۶	۰/۰۳۵۰
	$k_۲$	۷/۹۲۰۶	۰/۱۰۴۳

برآورد پارامترهای $k_۲, k_۱, a_۲, a_۱$ و انحراف استانداردشان در جدول ۲ نشان داده شده است. یکی از محدودیت‌ها در استفاده از مدل نیم‌مارکوف داشتن تعداد پارامترهای بالا با عدم‌قطعیت است. به این دلیل که پارامترهای نیم‌مارکوف فقط از تعداد کمی از داده‌ها یعنی با فوت‌های بعد از داغدیدگی سروکار دارند. با این حال هر چهار پارامتر، میزان قابل ملاحظه‌ای بالاتر از صفر هستند و این امر بیانگر این است که به هر دو پارامتر a_i برای نشان‌دادن تأثیر میزان داغدیدگی و پارامترهای سرعت کم‌شدن اثر داغدیدگی یعنی k_i نیازمند هستیم.

نمودار ۲: نیروی مرگ‌ومیر طی دوره زمانی پس از داغدارشدن



نمودار ۳: عامل‌های $F_۱(t)$ و $F_۲(t)$ در مدل نیم‌مارکوف



حال برای فهم بهتر مدل نیم‌مارکوف، نمودار ۲ را ملاحظه فرمایید که نشان می‌دهد نیروی مرگ‌ومیر برای هر دو جنس زن و مرد در سال‌های مختلف، متفاوت است. مقادیر به صورت سه نیروی مرگ‌ومیر تقسیم شده‌اند:

$\mu^{*}_{x(y)|0}$: نیروی مرگ‌ومیر در طی یک سال پس از داغدیدگی؛

$\mu^{*}_{x(y)|1}$: نیروی مرگ‌ومیر در طی دو سال پس از داغدیدگی؛

$\mu^{*}_{x(y)|2^+}$: نیروی مرگ‌ومیر بعد از دو سال پس از داغدیدگی.

مشاهده می‌کنیم که میزان نیروی مرگ‌ومیر زن کمتر از یک سال بیوه‌شده، بیشتر از نیروی مرگ‌ومیر زن کمتر از دو سال و بیشتر از دو سال بیوه شده است. درحالی‌که نیروی مرگ‌ومیر زن کمتر از دو سال و بیشتر از دو سال بیوه‌شده تفاوت چندانی با یکدیگر ندارد. عامل داغداری و بیوه‌شدن تقریباً بعد از سن ۷۰ سالگی تأثیرگذاری بیشتری بر هر سه نیروی مرگ‌ومیر زنان می‌گذارد، این امر تا حدودی در نیروی مرگ‌ومیر مردان نیز مشهود است، مضاف بر اینکه سال‌های اول و دوم ازدست‌دادن همسر برای مردان در درازمدت تأثیرگذارتر از زمان ازدست‌دادن همسر بعد از دو سال است.

از نمودار ۳ نیز می‌توان دریافت که چگونه عوامل افزاینده $F_1(t)$ و $F_2(t)$ در طول زمان تغییر می‌کنند. ستون اول نمودار ۳ بر یک سال پس از داغدیدگی تمرکز دارد که به وضوح نشان‌دهنده این است که مردانی که همسر خود را ازدست‌داده‌اند به مراتب بیشتر از زنان با همین شرایط تحت تأثیر عامل داغدیدگی بوده‌اند. از ستون دوم این نمودار نیز می‌توان نتیجه گرفت که تأثیر قلب شکسته در زنانی که همسر خود را ازدست‌داده‌اند در مقابل مردان با این وضعیت ماندگارتر است.

جمع‌بندی و پیشنهادها

وابستگی ربعی مثبت

به‌منظور درک وابستگی بلندمدت که توسط مدل‌های مارکوف بیان می‌شود، استفاده از مفهوم وابستگی ربعی مثبت[1] لازم است. این موضوع اولین بار توسط لهمن[2] معرفی شد. وابستگی ربعی مثبت یک صورت از وابستگی بین متغیرهای تصادفی X و Y است، که رابطه آن به‌این‌صورت است:

$$\Pr[(X,Y) \le (x,y)] \ge \Pr[X \le x] \Pr[Y \le y]$$

یا به‌طور معادل:

$$\Pr[(X,Y) > (x,y)] \ge \Pr[X > x] \Pr[Y > y]$$

به این معنی که مقادیر کوچک X را به مقادیر کوچک Y و مقادیر بزرگ X را به مقادیر بزرگ Y پیوند می‌دهد. حال فرض می‌کنیم T_x و T_y باقی‌ماندهٔ طول عمر زن و شوهر باشند. باقی‌مانده‌های طول عمر، T_x و T_y در صورتی وابستگی ربعی مثبت دارند، که از طریق روابط بالا و بازنویسی آنها به دو صورت زیر باشند:

$$\Pr(T_x \le t \mid T_y \le s) \ge \Pr(T_x \le t) \quad \forall t,s \ge 0$$

و

$$\Pr(T_x > t \mid T_y > s) \ge \Pr(T_x > t) \quad \forall t,s \ge 0$$

درمی‌یابیم که هر فرد درصورتی‌که همسرش برای مدت طولانی زنده باشد، امید به زندگی طولانی‌تری دارد و درصورتی‌که همسرش زود فوت کند امید به زندگی کمتری خواهد داشت.

نوربرگ[1] ثابت کرد که مطالب بیان‌شده در مدل‌های مارکوف درصورتی‌که مؤلفهٔ سانحهٔ مشترک وجود نداشته باشد، درست است به‌طوری‌که:

---

[1]. Positive Quadrant Dependence (PQD)

[2]. Lehmann, ۱۹۶۶

$\mu_x \equiv \mu_x^*$ و $\mu_y \equiv \mu_y^*$ $\Leftrightarrow$ T_yوT_x مستقل هستند

$\mu_x \leq \mu_x^*$ و $\mu_y \leq \mu_y^*$ $\Leftrightarrow$ T_yوT_x وابستگی ربعی مثبت دارند

بدون مؤلفهٔ سانحه مشترک، باقی‌ماندهٔ طول عمر زوجین درصورتی‌که نیروی مرگ‌ومیر قبل و بعد از داغدیدگی مساوی باشد، از یکدیگر مستقل هستند. زمانی که انتقال وضعیت سانحهٔ مشترک ($\mu^{\cdot\text{۳}}$) را در مدل مارکوف دخیل می‌کنیم، نتایج نوربرگ کمی تغییر خواهد کرد:

$\mu_x + \mu^{\cdot\text{۳}} \leq \mu_x^*$ و $\mu_y + \mu^{\cdot\text{۳}} \leq \mu_y^*$ $\Leftrightarrow$ T_yوT_x وابستگی ربعی مثبت دارند

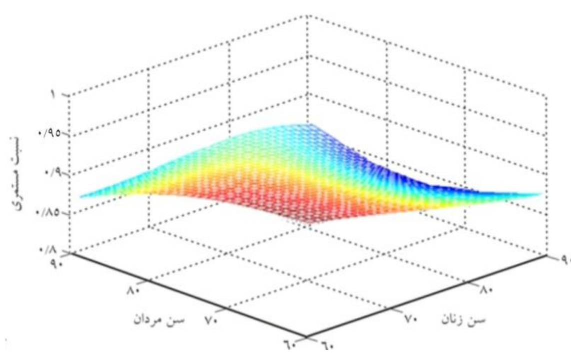
تعجبیان (۱۳۹۲) نیز ثابت می‌کند که حتی با وجود $\mu^{\cdot\text{۳}}$ نیز اگر نیروی مرگ‌ومیر قبل و بعد از داغدیدگی مساوی باشد PQD در مدل مارکوف برقرار خواهد بود.

اما در مدل نیم‌مارکوف عامل‌های افزاینده $F_\text{۱}(t)$ و $F_\text{۲}(t)$ برای هر t، بزرگ‌تر از یک هستند. نیروی مرگ‌ومیر بعد از داغدیدگی بیشتر از نیروی مرگ‌ومیر متناظر با آن قبل از داغدیدگی است. PQD در نیم‌مارکوف همیشه برقرار نیست، زیرا در این مدل کسانی که همسر خود را ازدست‌داده‌اند فرصت بهبود و بازیابی دارند، چون طبق رابطهٔ بالا PQD بیان می‌کند، نیروی مرگ‌ومیر زن x ساله‌ای که مدت‌ها از زمان فوت شوهرش می‌گذرد بیشتر از زن x ساله‌ای است که تازه شوهرش را ازدست‌داده‌است و این خلاف فرض نیم‌مارکوف است، چون در نیم‌مارکوف زن اول فرصت بهبودی بیشتری نسبت به زن دوم دارد.

مفاهیمی برای مقادیر مستمری

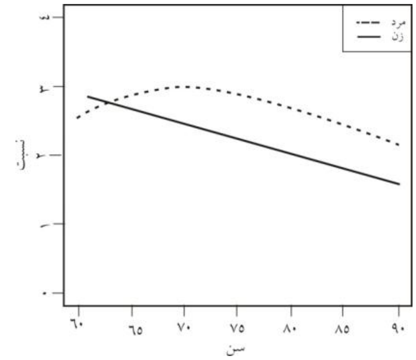
هر دو مدل‌های مارکوفی و نیم‌مارکوفی نشان‌دهندهٔ افزایش مرگ‌ومیر بعد از داغدیدگی هستند. اگرچه میزان شدت هریک، در این مقوله متفاوت است. زمانی که مدل نیم‌مارکوف اجازهٔ بازیابی بهبودی را بعد از داغدیدگی می‌دهد، مدل مارکوف، نیروی مرگ‌ومیر را به صورت دائمی در حال افزایش فرض می‌کند. در ادامه تأثیر این تفاوت را روی مقادیر مستمری مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نمودار ۴: نسبت حالت وابسته به استقلال مستمری آخرین بازمانده در مدل مارکوف

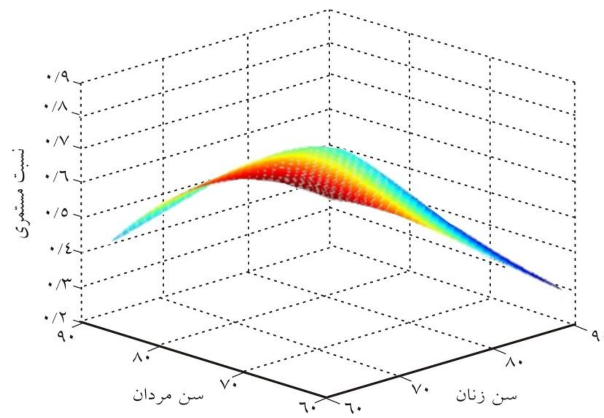


نمودار ۵: نسبت $\frac{\mu_x^*}{\mu_x+\mu^{\cdot\text{۳}}}$ و $\frac{\mu_y^*}{\mu_y+\mu^{\cdot\text{۳}}}$ محاسبه‌شده از برازش مدل مارکوف

[1]. Norberg, ۱۹۸۹



نمودار ۶: نسبت حالت وابسته به استقلال مستمری آخرین بازمانده در مدل نیم‌مارکوف



ابتدا مدل مارکوف را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نمودار سه‌بعدی ۴ نشان‌دهندۀ نسبت مقادیر مستمری آخرین بازمانده در حالت وابستگی طول عمر زوجین به فرض طول عمر مستقل تحت مدل مارکوف است. تمام نسبت‌های موجود در این نمودار کمتر از یک است و نشان می‌دهد در صورت استفاده از فرض استقلال بین طول عمرها مستمری آخرین بازمانده بیش از حد قیمت‌گذاری می‌شود. همچنین در این نمودار مشاهده می‌کنیم که نسبت مستمری‌ها وقتی تفاوت سنی بین زوجین بیشتر باشد، کمتر است. این مشاهدات بر این موضوع دلالت دارد که تأثیر وابستگی بلندمدت، قابل توجه و معنی‌دارتر از زمانی است که فاصله سنی $|x-y|$ زیادتر است. نمودار سه‌بعدی ۲ نامتقارن است. این نامتقارن بودن را می‌توان با استفاده از نسبت $\frac{\mu_x^*}{\mu_x+\mu^{03}}$ و $\frac{\mu_y^*}{\mu_y+\mu^{03}}$ توضیح داد. از نمودار ۵ مشاهده می‌کنیم نسبت‌ها از یکدیگر متفاوت هستند و این موضوع نشان‌دهندۀ تفاوت جنسی در تأثیرپذیری از عامل داغدیدگی روی مرگ‌ومیر زوجین است.

سپس مدل نیم‌مارکوف را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نمودار ۶ نشان‌دهندۀ نسبت مقادیر مستمری آخرین بازمانده در حالت وابستۀ طول عمر زوجین به فرضیۀ طول عمر مستقل آنها با استفاده از مدل نیم‌مارکوف است. مشاهده می‌کنید که نسبت‌ها به یک نزدیک هستند.

نتایج و بحث

به وضوح می‌توان دریافت که بین طول عمر زن و شوهر وابستگی وجود دارد. اما ماهیت وابستگی صرفاً به‌صورت مشاهدات تجربی، کافی نیست. از طریق مدل‌های مارکوفی به مستمری‌ها، داده‌های مرگ‌ومیر را برازش دادیم و بهتر به دو جنبه از تفاوت وابستگی بین طول عمر زوجین پی بردیم. ابتدا، عامل سانحۀ مشترک μ^{03} که بیان می‌کند ریسک ناشی از حادثه‌ای مصیبت‌بار روی زندگی هر دو زوجین تأثیر می‌گذارد. دوم اینکه در مدل نیم‌مارکوف به‌وسیله عوامل $F_1(t)$ و $F_2(t)$ مرگ‌ومیر ناشی از ضربۀ فوت یکی از زوجین را اندازه‌گیری کردیم.

نقطه ضعف‌هایی در هر دو مدل مارکوف و نیم‌مارکوف وجود دارد، چرا که باید تعداد زیادی از پارامترهای وابسته را وارد مدل کرده و به حجم کمی از داده‌ها اختصاص دهیم. پارامترهای برآوردشده به واریانس‌های تقریباً بزرگی میل می‌کنند و با کم‌کردن یا اضافه‌کردن تعداد کمی از داده‌ها نتیجه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی به‌صورت قابل توجهی تحت تأثیر قرار می‌گیرد.

شاید یکی از معایب استفاده از مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف استفاده از پارامترهای نسبتاً زیاد در برآورد مدل باشد، اگر از قانون گامپرتز برای مدل‌بندی توزیع طول عمر حاشیه‌ای استفاده کنیم در مدل مارکوف به برآورد ۹ پارامتر نیاز داریم (یک پارامتر عامل سانحهٔ مشترک، دو پارامتر از هر حالت وضعیت تأهل و بیوگی برای زن و مرد). برای مدل نیم‌مارکوف نیز به‌همین‌ترتیب است.

مقایسه به صورت کمّی برای ارزیابی بهره‌مندی از پارامترهای اضافی به مدل‌های برازش‌داده‌شده در مدل‌های مارکوف امر دشواری است؛ زیرا مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف با استفاده از درست‌نمایی جزئی، برازش داده شده‌اند؛ به‌این‌معنی که به آسانی نمی‌توان از معیارهای مبتنی‌بر روش‌های درست‌نمایی دیگری استفاده کرد.

اما براین‌باوریم که مزایای دیگری در استفاده از مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف وجود دارد که به شرح زیر می‌باشند:

در مطالعات مربوط‌به مرگ‌ومیر استفاده از نیروی مرگ‌ومیر به جای تابع توزیع، امری طبیعی است. ساختار وابستهٔ مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف در اثر ضربهٔ ناشی از داغدیدگی روی نیروی مرگ‌ومیر کاملاً واضح است درصورتی‌که این مسئله در استفاده از دیگر مدل‌ها کمتر مشخص است و هیچ یک از این مدل‌های دیگر همچون مفصل‌ها[۱] به طور مستقیم تأثیر داغدیدگی را روی مرگ‌ومیر بازماندگان بیان نمی‌کنند. با استفاده از مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف با ملاحظه به انتقال‌های بین وضعیت‌ها و تأثیر کوتاه‌مدت و بلندمدت ناشی از داغدیدگی روی مرگ‌ومیر، به سادگی می‌توان متوجه ماهیت وابستگی بین زندگی زوجین شد.

با معرفی عامل‌های $F_۱(t)$ و $F_۲(t)$ در مدل نیم‌مارکوف می‌توان ضربهٔ ناشی از سندروم قلب شکسته (که با گذشت زمان کم می‌شود) را کنترل کرد، درصورتی‌که انجام این کار با مدل‌های دیگر امر دشواری است.

فرض کنید داده‌های مربوط‌به زندگی یک فرد که شامل اطلاعات راجع‌به وضعیت تأهل هر فرد در لحظه فوت اوست را داریم. ما حتی با استفاده از رویکردهای مارکوفی می‌توانیم طول مدت زمان بیوگی زوج باقی‌مانده را از طریق تابع لگاریتم درست‌نمایی محاسبه کنیم. برای روش‌های دیگر اگر اطلاعی از سن یکی از زوجین در قید حیات یا سن همسرش در زمان فوت را نداشته باشیم نمی‌توان از ساختار وابستهٔ آنها بهره برد، چون این اطلاعات کافی نیست و تنها می‌توان داده‌های دو متغیره را به‌کاربرد.

به‌همین‌ترتیب می‌توانیم یک زندگی را با دانستن سن، جنسیت، وضعیت زوجین (و طول مدت زمان بیوگی آنها) مدل‌بندی کنیم. می‌توان این قیمت‌گذاری‌ها و ارزیابی‌ها را برای مستمری‌های زندگی و مستمری‌های یک فرد متأهل مسن یا بیوه مسن بهبود بخشید.

جمع‌بندی و پیشنهادها

ازاین‌پس پژوهش‌های بیشتری می‌تواند روی مدل‌سازی ساختار وابستهٔ مرگ‌ومیر مشترک زندگی زوجین در چارچوب روش‌های مارکوفی انجام شود. از دیگر مباحث برای پژوهش‌های آینده می‌توان به اصلاح‌کردن ساختار وابستهٔ طول عمر زندگی مشترک زوجین در مدل‌های مارکوفی برای مدل‌بندی مرگ‌ومیر زندگی مشترک زوجین اشاره نمود. همچنین ارتباط بین نرخ مرگ‌ومیر در وضعیت‌های متأهل و وضعیت‌های بیوه، نیاز به بررسی و مقایسه‌های بیشتری دارد یا بررسی این امر که چگونه عامل سانحهٔ مشترک با سن زن و شوهر می‌تواند تغییر کند. از دیگر مسائل می‌توان به این موضوع اشاره کرد که ما فقط تأثیر نزولی سندروم قلب شکسته را مدل‌بندی کرده‌ایم، درصورتی‌که می‌توان نرخ شدت برای انواع گوناگون ضایعه‌ها همچون سن، جنس و... را نیز مدل‌بندی کرد.

[۱]. Copulas

در این مقاله وابستگی ربعی مثبت را بر مدل‌های مارکوف و نیم‌مارکوف مورد بررسی قرار دادیم. شرایط وابستگی ربعی مثبت در مدل مارکوف به‌دست‌آمد ولی بالعکس مثال‌هایی در رد وجود وابستگی ربعی مثبت در مدل نیم‌مارکوف نیز بیان شد. از پژوهش‌های آینده می‌تواند به چالش‌کشیدن یک موضوع بالقوه در مورد بررسی شرایط وابستگی ربعی مثبت در مدل مرگ‌ومیر نیم‌مارکوف باشد.

منابع و ماخذ

تعجبیان، س.،(۱۳۹۲). کاربردهای رویکرد مارکوفی در مدل‌بندی مرگ‌ومیر زوجین. پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکدهٔ علوم ریاضی.

Carravetta; M.; De Dominicis; R. Manca; R., (۱۹۸۱). Semi markov process in social security problems. Cahiers du, ۶۳,C.E.R.O.

Denuit; M.; Dhaene; J.L.M.; Le Bailly De Tilleghem; C. Teghem; S., (۲۰۰۱). Measuring the impact of a dependence among insured life lengths. Belgian Actuarial Bulletin, ۱, pp.۱۸-۳۹.

Dickson; D.C.M.; Hardy; M.R. Waters; H.R., (۲۰۰۹). Actuarial mathematics for Life contingent risk. Cambridge University Press.

Frees; E.W.; Carriere; J. Valdez; E., (۱۹۹۶). Annuity valuation with dependent mortality. The Journal of Risk and Insurance, ۶۳, pp.۲۲۹-۲۶۱.

Gompertz; B., (۱۸۲۵). On the nature of the function expressive of the law of human mortality. Phylosophical Transactions, ۲۷, pp.۵۱۳-۵۱۹.

Hoem; J.M., (۱۹۷۲), Inhomogeneous semi-Markov processes, Select actuarial tables, and duration dependence in demography, in T.N.E. Greville, Population-Dynamics, Academic Press, pp.۲۵۱-۲۹۶.

Jagger; C. Sutton; C.J., (۱۹۹۱). Death after marital bereavement – is the risk increased?. Statistics in Medicine, ۱۰, pp.۳۹۵-۴۰۴.

Ji; M. M. Hardi; L.S., (۲۰۱۱). Markovian approaches to joint-life mortality. North American Journal, ۱۵ , pp.۳۵۷-۳۷۶.

Lehmann; E.L., (۱۹۶۶). Some concepts of dependence. The Annual of Mathematical Statistics, ۳۷, pp.۱۱۳۷-۱۱۵۳

Norberg; R., (۱۹۸۹). Actuarial analysis of dependent lives. Bulletin of the Swiss Association of Actuaries, ۱۹۸۹(۲), pp.۲۴۳-۲۵۴.

Spreeuw; J. Xu. W., (۲۰۰۸). Modelling the short-term dependence between Two remaining lifetimes. <http://www. actuaries.org.uk>, [Accessed ۲ Oct ۲۰۱۳].

Sverdrup; E., (۱۹۶۵). Estimates and test procedures in connection with stochastic models for deaths. Recoveries and Transfers between Different States of health, Skandinavisk Aktuarietidskrift, ۴۸, pp.۱۸۴-۲۱۱.

Waters, H.R. (۱۹۸۴). An approach to study of multiple state models. Journal of the Institute of Actuaries, ۱۱۴, pp.۵۶۹-۵۸۰.